УДК 550.831

Дубовенко Ю.І., канд. фіз.-мат. наук, н.с.
Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України
м. Київ, пр. Палладіна, 32, тел.: 424-2052, dubovenko@igph.kiev.ua

СПОСІБ ВІДНОВЛЕННЯ ПОТЕНЦІАЛУ ЗА ЗНАЧЕННЯМИ МОДУЛЯ ЙОГО ГРАДІЄНТА

Однією з важливих задач теорії потенціалу, що виникають при інтерпретації даних гравіметрії та в теорії фігури Землі, є гранична задача відновлення потенціалу сили тяжіння за значеннями модуля його градієнта, якими, по суті, є виміряні значення аномалій сили тяжіння. Теоретичне підґрунтя цієї задачі закладено на основі способу аналітичного продовження модуля градієнта потенціалу сили тяжіння (МГПСТ) для (лінійного) диференціального рівняння сили тяжіння, виведеного А.В. Чорним [1]. Ця гранична задача має два альтернативні шляхи розв'язання: ітераційний пошук границі послідовності розв'язків лінійних задач Неймана для рівняння Лапласа, реалізований А.І. Якимчиком [2], та постановка так званої нелінійної задачі Алексідзе для того ж рівняння на довільних банахових просторах, що є метою даної замітки.

Відомо, що потенціал сили тяжіння $V(x)$ є гармонічною функцією в області G^+, не зайнятій тяжіючими масами Землі. Однак скористатись цією його властивістю для відновлення значень сили тяжіння $g(x)$ в певних точках x необмеженої області G^+ шляхом розв'язання зовнішньої граничної задачі Неймана для рівняння Лапласа (це стосується так само і змішаної задачі) з граничною умовою $\frac{\partial V(x)}{\partial n} = g(x),\ x \in \partial W_x$ заважає неспівпадіння земного рельєфу ∂G – поверхні вимірювань аномалій $g(x)$ з будь-якою еквіпотенціальною поверхнею $\partial W_x : W(z) = Cx$, тобто, наближеність граничної умови при точному диференціальному рівнянні спричиняє неточний розв'язок задачі Неймана. Так само непридатний для редукції значень $g(x)$ з поверхні ∂G в область G^+ і розв'язок зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа (заодно і складнішої задачі Коші для того ж рівняння) через негармонічність функції $g(x),\ x \in G^+$, відзначену М.А. Алексідзе [3], тобто маємо наближене диференціальне рівняння і точні граничні дані.

Запропонована К. Юнгом [4] підміна приросту МГПСТ в локальній області вертикальною складовою сили тяжіння дозволила використати в тлумаченні аномалій потенціалу апарат теорії гармонічних функцій. Така трактовка значень аномалій $\Delta g(x)$ як значень гармонічної функції (в задачах гравірозвідки), її нормальної похідної, або їх лінійної комбінації (в задачах геодезичної гравіметрії), що задані на частині чи всій границі області її визначення, одначе, при розв'язанні граничних задач справедлива лише для областей малої міри ($1^o \times 1^o$ з глибиною до 10 км, сфера гравірозвідки, див. [2]). Перенесення такої підміни на поширені регіональні гравіметричні побудови, тим паче з метою вивчення розподілу глибинних неоднорідностей в корі і верхній мантії, неправомірне: відхилення від істинного розв'язку прямо пропорційне геометричним параметрам області, що вивчається.

В роботі [3] вперше з часів Юнга М. Алексідзе нагадав, що аномалії $\Delta g(x)$ є значеннями МГПСТ, а не однією із складових цього градієнта та вказав наближений спосіб відшукання гармонічного наближення до реального розподілу $\Delta g(x)$ в локальній області з точністю до сталої та геометрії самої області. Оскільки такі сталі залежать від форми й розмірів області малої міри (істотно різняться для рівнин і гірської місцевості), то в разі відновлення $\Delta g(x)$ в глобальній області з її значень в локальних підобластях відсутні будь-які критерії задовільного „склеювання" гармонічних наближень і відповідні побудови стають необґрунтованими.

Відтак, на основі даних про $\Delta g(x)$ неможливо сформулювати точні граничні умови

для жодної з класичних граничних задач математичної фізики (в т.ч. і для задачі Молоденського). Для характеристики розподілу $\Delta g(x)$ в глобальній області слід повніше враховувати диференціальні властивості сили тяжіння. Узагальнюючи вищевказані проблеми редукції значень $\Delta g(x)$, фактично отримуємо таку альтернативу:

1. віднайти диференціальне рівняння, якому б задовольняли значення МГПСТ, і вирішити для нього відповідну граничну задачу;
2. вирішити таку граничну задачу для потенціалу сили тяжіння, в граничних умовах якої безпосередньо закладено значення $g(x),\ x \in G^+$.

Перший варіант цієї альтернативи знайшов своє втілення у роботі [2], а наразі на загал пропонуються міркування щодо другого варіанту вирішення вказаної проблеми.

Нехай G^- – обмежена область точок тривимірного евклідового простору, зайнята масами Землі, G^+ – необмежене доповнення до неї, вільне від тяжіючих об'єктів, ∂G – границя між ними, тотожна фізичній поверхні Землі. Маси $M(\xi)$ $\xi \in G^-$ всередині Землі густини $dM(\xi) = \sigma(\xi) d\xi$ генерують зовні неї поле сили тяжіння з потенціалом

$$W(x) = f \int_{y^-} \frac{\sigma(\xi)}{|x - \xi|} d\xi + \begin{cases} \Omega(x), & x \in G^- \\ 0, & x \in G^+ \end{cases}, \tag{1}$$

де f – гравітаційна стала, $\Omega(x) = 0.5\omega^2(x_1 + x_2)$ – потенціал центробіжної сили, ω – модуль вектора кутової швидкості Землі, при цьому потенціал $W(x) \in C^{(2)}(G^-)$ належить до класу неперервних функцій разом з похідними до другого порядку включно, якщо густина тяжіючих мас $\sigma(\xi) \in C^{(1)}(\overline{G}^-)$ належить до подібного класу разом з першими похідними.

Напруженість поля (значення модуля градієнта потенціалу) дорівнює

$$g(x) = |-\nabla W(x)| = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial W(x)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k(x)}{\partial n} = (\overline{g}(x), \overline{n}(x)), \tag{2}$$

де $\dfrac{\partial x_k(x)}{\partial n} = \cos(n, x_k),\ k = 1,2,3$ – напрямні косинуси одиничного вектора $\overline{n}(x)$ внутрішньої нормалі до еквіпотенціальної поверхні $\partial W_x : W(z) = Cx$, яка проходить через точку x.

В рамках цієї моделі МГПСТ задовольняє (нелінійному в загальному випадку) диференціальному рівнянню сили тяжіння (еліптичне другого порядку типу Гельмгольца):

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_k^2} - a^2(x) g(x) = \begin{cases} -4\pi f\,|\mathrm{grad}\,\sigma(x)|, & x \in G^- \\ 0, & x \in G^+ \end{cases}, \tag{3}$$

де $a^2(x)$ – геометрична характеристика (міра кривизни) поверхні $\partial W_x : W(z) = Cx$. Саме це рівняння лягло в основу вирішення першого варіанту альтернативи: знайти функцію $g(x)$, $x \in G^+$, яка задовольняє всередині необмеженої замкненої області $\overline{G}^+$ рівнянню (3) за умови $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) \to 0$ за її значеннями $g(x) \in C(\partial G),\ x \in \partial G$ в будь-якій точці границі ∂G.

Альтернативний підхід ілюструє така постановка задачі: знайти функцію $W(x),\ x \in G^+$, яка задовольняє всередині необмеженої замкнутої області $\overline{G}^+ = G^+ \cup \partial G$ рівнянню Лапласа $\Delta W(x) = 0,\ x \in G^+$, якщо в будь-якій точці ляпуновської границі ∂G області і в нескінченно віддаленій точці вона задовольняє умови

$$\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial W(x)}{\partial x_k} \right)^2 = g^2(x),\ x \in \partial G,\ W(x) \to 0, \text{ якщо } |x| \to \infty, \tag{4}$$

де $g(x)$ – задана неперервна функція. Назвемо цю нелінійну граничну задачу задачею Алексідзе для рівняння Лапласа.

Відшукуючи гармонічну в області G^+ функцію $W(x)$ у вигляді потенціалу простого

шару $W(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial G}\frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|}dS_{\xi}$, $x\in G^{+}$ невідомої густини $\sigma(x)$, $x\in\partial G$ в результаті серії аналітичних перетворень отримуємо щодо шуканої густини наступне нелінійне інтегральне рівняння сили тяжіння:

$$\frac{1}{4}\sigma^{2}(x)+\frac{\sigma(x)}{4\pi}\int\limits_{\partial G}\frac{\cos(m,\rho)}{|x-\xi|^{2}}\sigma(\xi)dS_{\xi}+$$

$$+\frac{1}{16\pi^{2}}\int\limits_{\partial G}\int\limits_{\partial G}\frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|^{2}}\frac{\sigma(\eta)}{|x-\eta|^{2}}\cos(p,q)dS_{\xi}dS_{\eta}=g^{2}(x),\ x\in\partial G \quad (5)$$

Розв'язок цього інтегрального рівняння еквівалентний розв'язанню задачі Алексідзе з граничними даними на поверхні Ляпунова, оскільки за будь-якого вибору густини потенціал $W(x)$ простого шару задовольняє в G^{+} рівнянню Лапласа, а знайдене з останнього рівняння сили тяжіння значення густини забезпечує виконання граничної умови (4). Питання розв'язності задачі Алексідзе цим зводиться до вияснення умов коректності рівняння (5). На основі властивостей потенціалу простого шару рівняння (5) можна спростити до вигляду

$$\sigma^{2}(x)+\frac{1}{4\pi^{2}}\int\limits_{\partial G}\int\limits_{\partial G}\frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|^{2}}\frac{\sigma(\eta)}{|x-\eta|^{2}}\cos(p,q)dS_{\eta}dS_{\xi}=2g^{2}(x),\ x\in\partial G. \quad (6)$$

За цими двома рівняннями можливо знаходити не лише значення потенціалу $W(x)$, але й значення модуля його градієнта в будь-якій точці області G^{+}, які можна обчислити з виразу

$$g^{2}(x)=\frac{1}{16\pi^{2}}\sum_{k=1}^{3}\left(\int\limits_{\partial G}\frac{x_{k}-\xi_{k}}{|x-\xi|^{3}}\sigma(\xi)dS_{\xi}\right)^{2},$$

який не потребує обчислення чотирикратного інтегралу, як у випадку рівняння (4).

1. *Черный А.В*. Об уравнении силы тяжести. – Докл. АН УССР. – Сер. Б. – 1970, № 2. – С. 145-148.
2. *Якимчик А.І.* Гранична задача відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта: Автореф. дис... канд. ф.-м.н.: 04.00.22 / К. ІГФ НАНУ, 2001. – 16 с.
3. *Алексидзе М.А*. Редукция силы тяжести. – Тбилиси: Мецниереба, 1965. – 256 с.
4. *Юнг К*. Гравиметрические методы прикладной геофизики. – Прикладн. геофиз. – Вып. 1., 1936. – С. 53-204.